中国图象图形学报
Journal of Image and Graphics
Vol. 7(A), No. 1
Jan. 2002

快速 Foley-Sammon 鉴别变换及脸象鉴别

杨　健　涂庆华　杨静宇
(南京理工大学计算机科学系，南京　210094)

摘　要　为了解决小样本情况下，类内散布矩阵不可逆时，Foley-Sammon 最优鉴别矢量集的求解问题，给出了一种快速近似算法. 首先从理论上说明了当类内散布矩阵不可逆时，将在原始特征空间内求解最佳鉴别矢量集的问题映射到等于或小于 $c-1$(c 为样本类别数)维的欧氏空间内进行是可行的. 由于样本类别数远远小于原始特征空间的维数，故该算法不仅大大减少了特征抽取的时间，也提高了分类识别的速度. 在 ORL 标准人脸库上的试验结果表明，该算法不仅在识别率和识别时间上优于传统的扰动法和补空间法，而且比经典的特征脸方法和 Fisher 脸方法更为有效.

关键词　最优鉴别矢量集　特征抽取　脸象鉴别
中图法分类号：TP391.4　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006-8961(2002)01-0001-05

Fast Foley-Sammon Transform and Face Identification

YANG Jian, TU Qing-hua, YANG Jing-yu
(*Department of Computer Science, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing* 210094)

Abstract　It is well known that Foley-Sammon transform is a very effective method for feature extraction and that face identification is a typical small sample size problem. In the problems, the dimension of original features is so high that the within-class scatter matrix is always singular. In the singulas case, how to calculate Foley-Sammon optimal discriminant vectors(FSDV) is a very difficult problem. This paper presents a fast algorithm for calculating FSDV for small sample size problems. The main idea of the proposed algorithm is to map the problem of calculating FSDV in the original feature space to another problem of calculating FSDV in a($c-1$)-dimensional (or less) Euclidean space(where c is the number of pattern classes). In the transformed space, the FSDV can be calculated directly. Generally speaking, the number of classes is much less than the dimension of original sample, so our approach needs less time for feature extraction. We do Experiments on Olivetti Research Laboratory(ORL) face database. The experimental results show that our approach is better than previous method such as Perturbation and Complementary-Space in terms of discrimination power and computing time, and also superior to classical "Eigenfaces" and "Fisherfaces" method with respect to recognition rate.

Keywords　Optimal discriminant vectors, Feature extraction, Face identification

0　引　言

Fisher 鉴别准则函数定义为

$$J_f(\varphi) = \frac{\varphi^T S_b \varphi}{\varphi^T S_w \varphi} \tag{1}$$

其中，S_b 为类间散布矩阵，S_w 为类内散布矩阵.

当 S_w 非奇异时，Fisher 准则与以下准则等价[1]

$$J(\varphi) = \frac{\varphi^T S_b \varphi}{\varphi^T S_t \varphi} \tag{2}$$

其中，S_t 为总体散布矩阵，且 $S_t = S_b + S_w$.

基于 Fisher 准则的 Foley-Sammon(F-S)鉴别

基金项目：国家自然科学基金(60072034)
收稿日期：2000-11-13；改回日期：2001-04-04

变换[1,2]被认为是线性特征抽取的最有效方法之一，其基本思想就是在 Fisher 鉴别准则函数取极值的条件下，先求得一组满足正交条件的最佳鉴别矢量，然后再将高维特征矢量投影到这些鉴别矢量上，来构成低维的特征空间，以使模式识别可在低维空间中进行.

针对基于 Fisher 准则的最佳鉴别变换，Fukunaga 给出了一个维数定理[3]，即对于含有 c 个模式类别的分类问题，其有效的最佳鉴别矢量个数不超过 $c-1$ 个.

那么如何找到这 $c-1$ 个最有效的最佳鉴别矢量呢？以往提出的求解 Foley-Sammon 最优鉴别矢量集的各种算法[1,4]均未解决该问题.

另外，在人脸识别等图象识别问题中，由于类内散布矩阵 S_w 经常是奇异的[1,4,5]，因此在该情况下，最优鉴别矢量集的求解问题是一个困难而又迫切需要解决的问题. 近几年来，人们虽已提出了许多解决这类问题的方法[1,4]，但该问题依然没有得到很好的解决，这也是影响 F-S 鉴别变换在图象识别领域应用的主要原因之一. 为了解决该问题，本文给出了一种求解 F-S 最佳鉴别矢量集的简明而快速的近似算法.

1 算法与分析

1.1 算法与理论基础

当 S_w 不可逆时，因为目标函数(式2)是 Fisher 准则的合理延拓[1]，故在此采用式(2)的准则函数进行讨论.

引理 1[1] 设 A 为非负定矩阵，X 为 n 维向量，则 $X^TAX=0$，当且仅当 $AX=0$.

引理 2 当矩阵 S_t 奇异时，$X^TS_tX=0$，当且仅当 $X^TS_wX=0$ 和 $X^TS_bX=0$.

证明 因为 S_w, S_b 为非负定矩阵，故 $X^TS_wX=0$ 和 $X^TS_bX=0$，

又 $X^TS_tX=X^TS_wX+X^TS_bX$，

所以，$X^TS_tX=0$，当且仅当 $X^TS_wX=0$ 和 $X^TS_bX=0$. 证毕.

引理 3 当矩阵 S_t 可逆时，Foley-Sammon 最优鉴别矢量集的第一个鉴别矢量 φ_1 取为单位化的 Fisher 最优鉴别方向；当前 i 个最优鉴别矢量 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_i$ 求出之后，第 $i+1$ 个鉴别矢量 φ_{i+1} 为下列广义特征方程的最大特征值 λ_{max} 所对应的单位特征向量，且 $J(\varphi_{i+1})=\lambda_{max}$.

$$B_iS_b\varphi=\lambda S_t\varphi \tag{3}$$

其中

$$B_i=I_n-D_i^T(D_iS_t^{-1}D_i^T)^{-1}D_iS_t^{-1}, D_i=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_i)^T$$

由 Fisher 准则的等价准则(式2)，易证，当矩阵 S_t 可逆时，引理3求解 F-S 最优鉴别矢量集的方法与金忠推论1的方法[6]等价.

设线性方程组 $S_bX=0$ 的解空间为 $S_b^{-1}(0)$，即

$$S_b^{-1}(0)=\{X \mid S_bX=0, X\in R^n\}$$

定理 1 设$\overline{S_b^{-1}(0)}$为子空间 $S_b^{-1}(0)$的正交补空间，则

$$S_b^{-1}(0)=\mathrm{span}\{\beta_{r+1},\cdots,\beta_n\}$$

$$\overline{S_b^{-1}(0)}=\mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\}$$

其中，$r=\mathrm{rank}(S_b)$，$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 S_b 的标准正交特征向量，且前 r 个对应着 S_b 的非零特征值.

证明 设 $r=\mathrm{rank}(S_b)$，因为 S_b 是非负定矩阵，故存在正交矩阵 $T=(\beta_1,\cdots,\beta_r,\cdots,\beta_n)$，使得

$$T^TS_bT=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$$

故

$$\beta_i^TS_b\beta_i=\lambda_i>0, i=1,\cdots,r$$

$$\beta_j^TS_b\beta_j=0, j=r+1,\cdots,n$$

由引理1，$S_b^{-1}(0)=\mathrm{span}\{\beta_{r+1},\cdots,\beta_n\}$，故 $\overline{S_b^{-1}(0)}=\mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\}$. 证毕.

由定理1易知，子空间$\overline{S_b^{-1}(0)}$的维数为 r.

设原始特征为 n 维实向量，那么最优鉴别矢量 φ 必然在 n 维欧氏空间 R^n 中选取，对任意 $\xi\in S_b^{-1}(0)$，由定理1知，$J(\xi)=0$. 也就是说，就 Fisher 准则而言，子空间$S_b^{-1}(0)$中不存在任何有效鉴别信息. 本文则是想在 $S_b^{-1}(0)$的正交补空间$\overline{S_b^{-1}(0)}$中选取鉴别矢量. 虽然，从理论上讲，这样可能会损失一部分鉴别信息，但由于$\overline{S_b^{-1}(0)}$集中了绝大多数的鉴别信息，故在一般情况下损失的有效信息并不多，试验结果证实了这一点.

定理 2 欧氏空间 R^n 的子空间$\overline{S_b^{-1}(0)}$与 r 维欧氏空间 R^r 同构. 其中，$r=\mathrm{rank}(S_b)$.

证明 构造线性映射 $X=PZ$，其中，$P=(\beta_1,\cdots,\beta_r)$，$X\in\overline{S_b^{-1}(0)}$，$Z\in R^r$，显然，该映射是 R^r 到$\overline{S_b^{-1}(0)}$上的一一映射，故对于欧氏空间内的向量加法和数乘运算，子空间$\overline{S_b^{-1}(0)}$与 R^r 同构. 证毕.

由定理2，在子空间$\overline{S_b^{-1}(0)}$中选取最优鉴别矢量集的问题就可转化为在 r 维欧氏空间 R^r 中进行.

定义 1 设 $r=\mathrm{rank}(S_b)$，矩阵 $P=(\beta_1,\cdots,\beta_r)$，其中，$\beta_1,\cdots,\beta_r$ 为 S_b 的 r 个非零特征值所对应的 r

个标准正交的特征向量.定义

$$\widetilde{J}(Z) = \frac{Z^{T}\widetilde{S}_{b}Z}{Z^{T}\widetilde{S}_{t}Z} \tag{4}$$

其中,$\widetilde{S}_b = P^T S_b P$,$\widetilde{S}_t = P^T S_t P$.

因为 S_b,S_w 为非负定矩阵,且 $S_t = S_b + S_w$,由引理 2 易知,$\widetilde{S}_b$,$\widetilde{S}_t$ 是 r 维欧氏空间 R^r 中的正定矩阵,故在欧氏空间 R^r 中,可直接采用引理 3 确定 $\widetilde{J}(Z)$ 准则下的最优鉴别矢量集.

定理 3　设欧氏空间 R^r 中,$\widetilde{J}(Z)$ 准则下的 F-S 最优鉴别矢量集为 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_d (d \leq r)$,则 $\varphi_1 = PZ_1, \varphi_2 = PZ_2, \cdots, \varphi_d = PZ_d (d \leq r)$ 为 $J(\varphi)$ 准则下标准正交的鉴别矢量集,且 $J(\varphi_j) = \widetilde{J}(Z_j)$,$j = 1, \cdots, d$.

证明　由 F-S 最优鉴别矢量正交性条件知

$$Z_i^T Z_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

故,$\varphi_i^T \varphi_j = Z_i^T P^T P Z j = Z_i^T Z_j = \delta_{ij}$.

所以,$\varphi_1, \cdots, \varphi_d$ 为 $J(\varphi)$ 准则下,标准正交的鉴别矢量集,且

$$J(\varphi_j) = \frac{(PZ_j)^T S_b (PZ_j)}{(PZ_j)^T S_t (PZ_j)} = \frac{Z_j^T (P^T S_b P) Z_j}{Z_j^T (P^T S_t P) Z_j} = \frac{Z_j^T \widetilde{S}_b Z_j}{Z_j^T \widetilde{S}_t Z_j} = \widetilde{J}(Z_j)$$

证毕.

定理 3 提供了一种类内散布阵 S_w 奇异情况下,求解最优鉴别矢量集的近似算法.

1.2　算法分析

由于 $r = \mathrm{rank}(S_b) \leq c - 1$,故定理 3 所确定的最优鉴别矢量集所包含的鉴别矢量个数不超过 $c-1$ 个,这与 Fukunaga 维数定理完全吻合[3].

由定理 2 和定理 3 知,本文算法本质上是在 $c-1$ 维的空间内求解最佳鉴别矢量集,一般地,由于样本类别数远小于原始特征样本的维数,因此,与传统的补空间法[1]和扰动法[4]相比,本文算法实质上是在更低维的空间内求解与广义本征方程 $\widetilde{S}_b \varphi = \lambda \widetilde{S} \varphi$ 的特征值对应的特征向量,故大大节省了求解时间,即提高了求解速度.

特别当原始特征样本的维数很大(比如人脸图象矢量为 92×112=10 304 维)时,在如此高维的原始特征空间内,用传统的扰动法和补空间法直接求解最优鉴别矢量集几乎是不可行的,因为扰动法要在原始特征空间内,求解扰动以后的类内散布矩阵 S_w 的本征向量是异常困难的;而补空间法因需要在原始特征空间内构造子空间的正交补空间,也会耗费惊人的计算量.本文算法则完全避免了这些缺陷.

1.3　快速 F-S 鉴别变换

由定理 3 确定的最优鉴别矢量集 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_d (d \leq r)$ 可构成如下投影变换,称之为快速 Foley-Sammon(F-S)鉴别变换.

$$Y = W^T X, \text{其中}, W = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_d) \tag{5}$$

由该鉴别变换即可将 n 维原始样本压缩为 d 维的特征矢量.

2　试验结果及分析

ORL 标准人脸库由 40 人,每人 10 幅 92×112 大小的图象组成,其中有些图象因拍摄于不同时期,人的脸部表情和脸部细节有着不同程度的变化,比如,笑或不笑,眼睛或睁或闭,戴或不戴眼镜;人脸姿态也有相当程度的变化,深度旋转和平面旋转可达 20°;人脸的尺度也有多达 10%的变化.图 1 是 ORL 人脸库中某一人的 10 幅人脸图象.共进行了两个试验.

图 1　ORL 人脸库中的 10 幅图象

其中第 1 个试验的目的是为了比较补空间法[1],扰动法[4]和本文算法的性能.

本文取 ORL 标准人脸库的前 20 人的脸部图象做实验.实验时,以每人的前 4 幅图象作为训练样本,后 6 幅作为测试样本,为了便于比较扰动法、补空间法和本文算法的性能,先用文献[7]的方法抽去 112 维投影特征,并分别由扰动法(参数 $\delta = 10^{-3}$)、补空间法、本文算法获取的最佳鉴别矢量集作最佳鉴别变换,然后将压缩后的鉴别特征,利用最近邻分类器进行分类,其识别结果和识别每个测试样本的平均时间见表 1.

从表 1 可以看出,本文算法所抽取的特征,在最近邻分类器下的误识数明显低于扰动法和补空间法,而且随着鉴别矢量个数的增加,错误率的收敛速

度大大加快,当最佳鉴别矢量数为14时,已达到92.5%的最佳识别率.通过这3种方法识别结果的比较可见,本文算法不但识别率高,而且具有更强的维数压缩能力,且能够将原始特征的维数压缩到最低的程度,从而使得模式识别可在更低维的特征空间内进行.

另外,从特征抽取和识别的时间来看,本文算法用于抽取每幅人脸图象特征和识别的平均时间只需0.06s,该速度快于扰动法5倍,补空间法30倍.

表1 扰动法、补空间法和本文算法识别结果(误识数)对照表

识别方法	最佳鉴别矢量数												平均时间(s)
	14	15	16	17	18	19	20	30	40	50	60	70	
扰动法	71	72	73	73	73	73	75	76	49	47	33	30	0.32
补空间法	71	63	65	57	49	46	43	35	70	76	49	71	1.85
本文算法	9	9	9	11	14	12							0.06

第2个试验是对整个ORL标准人脸库进行试验,试验时,以每人的前5幅图象作为训练样本,后5幅作为测试样本,这样训练样本和测试样本总数均为200.由于试验需从92×112=10 304维的人脸图象矢量上直接抽取特征,数量太多,为此,先采用文献[8]的方法,即先利用奇异值分解定理来求出与类间散布矩阵 S_b 的非零特征值对应的特征向量,共39个,并由这39个特征向量来构成变换矩阵 P;然后利用本文算法获取的最佳鉴别矢量集来抽取31~39维鉴别特征,最后分别采用最近邻分类器和最小距离分类器进行分类,识别结果见表2.

表2 最近邻和最小距离分类器识别结果(误识数)表

方法	鉴别矢量数									最佳识别率(%)	最低识别率(%)
	31	32	33	34	35	36	37	38	39		
最小距离	15	13	13	16	16	16	15	16	18	93.5	91.0
最近邻	11	9	8	12	11	11	10	9	9	96.0	94.0

由表2可见,由本文算法压缩得到的31~39维鉴别特征,在最近邻分类器下,识别率稳定在94%以上,最佳识别率为96%;在最小距离分类器下的结果较为一般,但识别率也能保持在91%以上.由此也可看出,最近邻分类器更适合于由本文算法所抽取的鉴别特征.

在此基础上,又进一步做了本文算法和经典的特征脸[5,9]方法和Fisher脸[5]方法的比较试验,即分别利用特征脸方法和Fisher脸方法抽取31~39维鉴别特征,再采用最近邻分类器和最小距离分类器进行分类,其中最佳识别率统计结果见表3.

表3 特征脸、Fisher脸和本文算法最佳识别率对照表

	特征脸	Fisher脸	本文算法
最小距离	87.7	89.5	93.5
最近邻	93.5	89.0	96.0

由表3可见,本文算法抽取的特征在识别率上明显优于特征脸方法和Fisher脸方法.由表2与表3对照可见,另外两种方法的最佳识别率甚至低于本文方法的最低识别率.

此外,将用实验2中的方法抽取的20(或17~20)维鉴别特征,用于识别ORL库前20人样本(每人的前5幅图象作为训练样本),并采用最近邻分类器进行分类,获得了98%的识别率.

3 结 论

本文给出了一种小样本情况下,求解Foley-Sammon最优鉴别矢量集的快速近似算法.与传统的扰动法和补空间法相比,本文算法的优点是:(1)求解最佳鉴别矢量集的速度快,识别率高;(2)具有更强的维数压缩能力;(3)抽取的特征识别率较高.其ORL标准人脸库的试验结果表明,该算法不但在识别率和识别时间上均优于扰动法和补空间法,而且比经典的特征脸方法和Fisher脸方法更为有效.

参 考 文 献

1 Liu K, Yang J Y, Cheng Y Q *et al*. An efficient algorithm for Foley-Sammon optimal set of discriminant vectors by algebraic method[J]. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 1992,6(5):817~829.

2 Tian Q. Image classification by the Foley-Sammon transform [J]. Optical Engineering, 1986,25(7):834~839.

3 Fukunaga K. Statistical pattern recognition[M]. New York: Academic Press, 1990.

4 Hong Z Q, Yang J Y. Optimal discriminant plane for a small number of samples and design method of classifier on the plane [J]. Pattern Recognition, 1991,24(4):317~324.

5 Peter N Belhumeur, Hespanha Joao P, Kriegman David J. Eigenfaces vs. Fisherfaces: Recognition using class specific linear projection[J]. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., 1997,19(7):711~720.

6 金忠, 杨静宇, 胡钟山. 有效鉴别特征的抽取与维数问题[J]. 计算机学报, 2000,23(1):108~112.

7 Liu K, Yang J Y, Cheng Y Q. Algebraic feature extraction for image recognition based on an optimal discriminant criterion[J]. Pattern Recognition, 1993,26(6):903~911.

8 彭辉,张长水,荣钢等. 基于K-L变换的人脸自动识别方法[J].

清华大学学报(自然科学版),1997,37(3):67～70.

9 Turk M, Pentland A. Eigenfaces for recognition[J]. Journal of Cognitive Neuroscience, 1991,3(1):71～86.

杨　健　1973 年生,1995 年获徐州师范大学并理学学士学位,1998 年获长沙铁道学院理学硕士学位,现为南京理工大学数学系讲师,计算机科学系在职博士研究生. 主要研究方向为模式识别、图象处理、人脸检测与识别.

涂庆华　1974 年生,1998 获南京理工大学工学学士学位,在职硕士研究生. 主要研究方向为计算机网络和模式识别.

杨静宇　1941 年生,南京理工大学计算机科学系主任,教授,博士生导师. 主要研究领域为计算机视觉、信息融合、模式识别、智能机器人. 已在该领域发表论文逾百篇.